مدیریت برآموزش سازمانها سال دوازدهم، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۲ شماره صفحه ۲۷۳- ۲۴۳

هنجاریابی مقیاس ارزیابی دانش محتوایی پداگوژی با تاکید بر دانش اثبات دبیران ریاضی دوره متوسطه

محمدجواد کارخانه، دانشجوی دکتری تخصصی، گروه آموزش ریاضی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
***نسیم اصغری،** استادیار گروه آموزش ریاضی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

چکیده

بررسی کیفیت دانش محتوایی پداگوژی دبیران ریاضی می تواند راهگشایی برای ارزشیابی کیفیت تدریس آنها در حوزه های مختلف ریاضی باشد. از آنجایی که هدف این پژوهش مباحث ریاضی و حوزه تعریف شده در زمینه اثبات و دانش آن بود، ضروری به نظر می رسد که کیفیت دانش محتوایی پداگوژی و دانش اثبات در میان دبیران ریاضی بررسی گردد. دبیران ریاضی در دوره متوسطه با برخی از مباحثی در کتب درسی ریاضی مواجه می شوند که نیازمند دانش کافی در زمینه اثبات می باشد. دانش اثبات در سطح مناسب می تواند چالش های دانش آموزان را در زمینه استدلال های ریاضی مرتفع سازد. پژوهش حاضر با روش پیمایشی با تکیه بر هنجاریابی انجام گرفت. در این پژوهش با تکیه بر پیشـــــینه های مربوطه در حوزه دانش محتوایی پداگوژی و دانش اثبات، مولفه هایی در نظر گردید. جامعه ی آماری شامل ۴۲۰ دبیر ریاضی زن و مرد شاغل به خدمت در دوره اول و دوم متوسطه در مدارس دولتی و غیر دولتی در شهرستان جنوب و جنوب شرقی و غربی استان تهران بودند که از این میان، شهرستان های پیشوا، پاکدشت، قرچک، کهریزک، ورامین و ری از استان تهران در سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲ در مد نظر قرار گرفت است. با روش نمونه گیری شبه خوشه ای و نمونه گیری بر اساس جدول کریسی- مورگان، ۲۰۰ نفر در مد نظر قرار گرفتند. پرسشنامه ای بر اساس پژوهش(2019).Kadarisma et al و(2016) Lesseig در زمینه دانش محتوایی پداگوژی و دانش ریاضی طراحی و ساخته شد. پس از بررسی روایی محتوایی با روش CVR و پایایی آن، تحلیلی عاملی اکتشافی بر گویه ها و تفکیک مولفه های پرسشنامه انجام گرفت. در نهایت بر اساس تحلیل های عاملی اکتشافی، ۳۰ گویه با پنج عامل برای ارزیابی دانش محتوایی پداگوژی با تاکید بر دانش اثبات دبیران ریاضی دوره متوسطه طراحی و هنجاریابی گردید.

واژگان کلیدی: دانش محتوایی پداگوژی، دانش اثبات، ریاضی، دبیران، دوره متوسطه.

* نویسنده مسئول: Nasim.asghary@gmail.com
دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۶/۳۰ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۹/۳۰

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]
[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

Managing Education in Organizations Vol.12/No.4/ Winter 2023 Page 243-273

Normative Evaluation Scale of Pedagogical Content Knowledge with Emphasis on Proving knowledge of Secondary School Mathematics Teachers

Mohamadjavad Karkhaneh, Phd. Student, Mathematics Education Group, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran
*__Nasim Asghari,__ Assistant Professor, Mathematics Education Group, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

Abstract
Examining the quality of content knowledge of math teachers' pedagogy can be a way to evaluate the quality of their teaching in different areas of mathematics. Since the purpose of this research was mathematical topics and the field defined in the field of proof and its knowledge, it seems necessary to check the quality of pedagogical content knowledge and proof knowledge among mathematics teachers. Mathematics teachers in secondary school encounter some topics in mathematics textbooks that require sufficient knowledge in the field of proof. Knowledge of proof at an appropriate level can solve the challenges of students in the field of mathematical reasoning. The current research was carried out based on the survey method, relying on standardization. In this research, relying on relevant backgrounds in the field of pedagogical content knowledge and knowledge of proof, components were considered. The statistical population consisted of 420 male and female mathematics teachers working in the first and second year of high school in government and non-government schools in the south, southeast and west cities of Tehran province, including the cities of Pishva, Pakdasht, Qarchak, and Kahrizak, Varamin and Rey from Tehran province in the academic year 2022-2023 has been considered. Two haundred people were selected by quasi-cluster sampling and sampling based on Krejcie & Morgan table. A questionnaire was designed and built based on the research of Kadarisma et al. (2019) & Lesseig (2016). After checking the content validity with the CVR method and its reliability, an exploratory factor analysis was performed on the items and the separation of the components of the questionnaire. Finally, based on exploratory factor analysis, 30 items with five components were designed and standardized to evaluate the pedagogical content knowledge with an emphasis on proof knowledge of secondary school mathematics teachers.

Keywords: Pedagogical content knowledge, proving knowledge, mathematics, teachers, secondary course**.**

* Corresponding author: Nasim.asghary@gmail.com
Receiving Date: 21/9/2023 Acceptance Date: 21/12/2023

[Downloaded from journalieaa.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

مقدمه

در دوران مدرسه بالاخص در دوره متوسطه، حیطه دانش انتزاعی نسبت به دوره ابتدایی بیشتر و چالش های آموزشی – یادگیری آن نیز به طبع تغییر می یابد. تدریس مفاهیم ریاضی دوره متوسطه به دانش تخصصی و مهارت یاددهی نیازمند است. نیاز به تدریس مبتنی بر مفاهیم انتزاعی ریاضی نمی تواند تمام نیازهای یادگیری فردی دانش آموزان را مرتفع سازد و باید دانش محتوایی با دانش پداگوژی با تاکید بر تربیت استعدادهای دانش آموزان در حل مساله ریاضی تلفیق شود. در یادگیری مفاهیم ریاضی دوره متوسطه، با اثبات و استدلال مواجه می شویم. اثبات یکی از رویکردهای انتزاعی و چالش برانگیز برای دانش آموزان دوره متوسطه محسوب می شود (Lee, 2016). اثبات ریاضی، فهم و نگرش افراد را در پدیده های جهان پیش رو توسعه می بخشد. افرادی که قابلیت ارائه استدلال و اثبات را دارند، از تفکر تحلیلی برخوردار هستند، آنها می توانند الگوها، ساختارها و ایده های ریاضی را به خوبی بفهمند و استفاده کنند (Reyhani & Kolahdoz, 2012). شورای ملی معلمان ریاضی[1] (2000) در چگونگی یادگیری اثبات در پایان دوران مدرسه، بیانیه ای ارائه دادند مبنی بر اینکه؛ اثبات و بیان استدلال از جمله جنبه های اساسی ریاضیات است که دانش آموزان باید قادر به تشخیص آنها باشند؛ دانش آموزان باید توانمندی ارائه حدسیه ها و بررسی درستی حدسیه ها را داشته باشند؛ دانش آموزان باید بتوانند اثبات های ریاضی را طراحی و بیان کنند و در نهایت آنها را مورد ارزیابی قرار دهند، همچنین دانش آموزان باید توانمندی انتخاب و استفاده از اثبات و روش های استدلال را داشته باشند (Gholamazad & Gooya, 2006). اثبات بخش مهمی از ریاضیات است که می توانیم به عنوان ستون ساختمان ریاضیات در نظر گیریم. بنابراین، آموزش ریاضی به ویژه در یادگیری ریاضیات دوره متوسطه، بر چگونگی اثبات ریاضی تاکید دارد. دانش آموزانی که وارد دوره متوسطه می شوند، باید دانش ریاضی رسمی را توسعه دهند. بسیاری از پژوهشگران در مورد اثبات ریاضی و یادگیری آن پژوهش کرده اند. برخی از آنها در مورد طرحواره های اثبات در ذهن دانش آموزان مطالعاتی داشتند (Syamsuri & Santosa, 2017). این مطالعات نشان دادند که طرحواره های اثبات در ریاضی باید با پیش زمینه های یادگیری های دانش آموزان همراه باشد. لذا آنها نشان دادند که آموزش شکل گیری طرحواره های اثبات در آموزش ریاضی اهمیت دارد. در دوره ابتدایی اثبات و طرحواره های شکل گیری آن به صورت غیر رسمی تدریس می شود. سپس، در دوره متوسطه دانش آموزان با اثبات های رسمی روبرو می شوند. اثبات رسمی به عنوان یک فرآیند از تعاریف کمی ریاضی شروع می شود و استنباط می کند که سایر ویژگی ها/تعاریف رسمی ریاضی به عنوان یک نتیجه بدست می آیند (Tall et al., 2012).

[1].National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

یادگیری نحوه ساخت اثبات رسمی برای معنا بخشیدن به یک تعریف رسمی است که می تواند در ساخت پایه ای قضیه استفاده شود. در مطالعات پیشین نشان داده شده است که دانش آموزان سال آخر دوره متوسطه باید دانش ریاضی خود را به طور رسمی توسعه دهند. یک اثبات رسمی، مبتنی بر منطق دقیق است و می تواند همانند یک مباحثه در میان ریاضیدانان مطرح و بررسی شود. بنابراین، دانش آموزان به تمرین‌های اثباتی نیاز دارند تا بتوانند ساختار ریاضی رسمی را درک کنند. فرآیند اثبات به عنوان یک گزاره ریاضی شامل دنباله ای از اعمال ذهنی و فیزیکی است، همانند؛ نوشتن، فکر کردن برای شروع اثبات، رسم نمودارها، تأمل در اعمال قبلی یا تلاش برای به خاطر سپـردن مثال های پیشین (Selden & Selden, 2003). اثبات تنها نوشتن، فکر کردن و .... نیست، نوعی قضاوت را نیز در بر می گیرد. در واقع، اثبات شامل بخش دیگری همچون قضاوت در مورد درستی یک استدلال، قضیه یا گزاره است. بسیاری از مطالعات در حوزه اثبات و استدلال نشان دادند که فرایند استدلال و اثبات برای شناخت و انجام فعالیت های ریاضی و توسعه طرحواره های ذهنی و تفکر منطقی و یکی از ابزارهای مهم در فرآیند یاددهی- یادگیری ریاضی است. برخی از مطالعات نشان دادند که یکی از مراحل مهم در فرآیند یاددهی- یادگیری ریاضی، پرورش یادگـــــیرندگانی است که بتوانند به خوبی استدلال کنند، توانایی قضـــــاوت داشته باشند و برای تصمیم گیری در حل مساله منطقی آماده باشند(Reyhani & Kolahdoz, 2012. در حالت کلی در جوامع آکادمیکی، مشاهده می شود که ریاضیات از یک نظریه استنتاجی نشات می گیرد که ریشه آن اثبات است. بر این مبنا، نظریه پردازان در حوزه آموزش ریاضی موافقند که ریاضیات با اصول و ایده های اولیه شروع می شود و بر اساس آن مبناها، ایده ها و نظریه های بعدی مطرح می شود. قضایای ریاضی که بر اساس یک برهان مطرح می شوند، از همان تعاریف و اصول اولیه گرفته می شوند. اثبات هر قضیه در ریاضی در حوزه حساب، جبر و هندسه بر اساس تعاریف و قوانین مشخص استنباطی مطرح می شوند (Gholamazad & Gooya, 2006). چنین فرآیندی برای بیان و طرح اثبات در سه حوزه ریاضی نیازمند آموزشی است که چگونگی طرح و اجرای مراحل اثبات را تسهیل می سازد. معلم برای تسهیل یادگیری ریاضیات یک نقش کلیدی در کلاس درس را ایفا می کند. او می تواند دانش آموزان را در اثبات ریاضی یاری کند. در این بین، معـــــلم می تواند برای یاددهی انجام برهان های ریاضی از برهان های ملموس در کلاس استفاده کنند. این نوعی مهارت برای معلم در کلاس ریاضی محسوب می شود (Sowder & Harel, 2003). لذا کمک های آموزشـــی معلم در زمینه اثبات ریاضی می تواند به تدریج انجام شود و در نهایت منجر به اثبات ملموس شود. فرآیند آموزش اثبات در دوره آموزشی مدرسه و دانشگاه تاحدودی متفاوت است. دانش آموزانی که بر تعاریف و ایده های اساسی ریاضی مسلط هستند، بهتر می توانند در دوران دانشگاه به اثبات های انتزاعی دست یابند. در آموزش ریاضی دوران مدرسه، فرایند اثبات جایگاه خاصی دارد. فرآیند اثبات در دوران مدرسه نیازمند درک و فهم معلم و دانش آموز از اثبات، دانش کافی معلم از اثبات، توانمندی های ریاضی معلم و دانش آموز است.

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

اساس ریاضیات، اثبات است. هر علمی توسط مشاهده شناخته و تایید می شود، اما ریاضیات با استـــــدلال منطقی تایید و مطرح می شود. لذا جوهر و اساس ریاضیات در اثبات و استدلال است. اگر توانمـــــندی اثبات در دانش آموز در دوران مدرسه بالاخص دوره متوسطه، رشد نکند، یادگیری ریاضی برای او به مجموعه ای از رویه ها و مثال های تکراری بدون تفــکر و اســـــتدلال، تبدیل می شود (Ross, 2006).

مهارت و دانش معلم در کلاس درس ریاضی یکی از شاخص های مهم تدریس است. کلاس ریاضی ای که بتواند شرایط استدلال کردن دانش آموزان را فراهم سازد، می تواند بستری مناسب برای اثبات و استدلال های انتزاعی در دوران دانشگاه را فراهم سازد. برای این منظور باید کیفیت دانش تخصصی معلم در کلاس ریاضی بررسی شود. بسیاری از نظریه پردازان در زمینه بررسی دانش معلمان، مطالعاتی داشتند که نمونه ای از آن، دیدگاه ها و طبقه بندی های دانش معلم از نظر(1986) Shulman است. یکی از طبقه بندی های دانش معلم از دیدگاه(1986) Shulman، دانش محتوایی پداگوژی بود. دانش محتوایی پداگوژی میزان درک معلمان از این مطلب است که چگونه به یک گروه از دانش آموزان کمک کنند تا بتوانند یک موضوع خاص را در حین تدریس با وجود محدودیت های شرایطی، فرهنگی و اجتماعی در محیط یادگیری، با استفاده از راهبردهای مختلف آموزشی، مثال ها و ارزیابی ها بفهمند. مطالعات پیشین در حوزه ارزیابی دانش محتوایی پداگوژی برای دبیران ریاضی قبل از خدمت و ضمن خدمت و در سطوح مختلف پایه انجام شده است. Morrison & Luttenegger (2015) مطالعه ای را بر روی اندازه گیری دانش محتوایی پداگوژی برای مربیان مهدکودک داشتند. Lim & Guerra (2015) بر ارزیابی دانش محتوایی پداگوژی برای معلمان پیش از خدمت در سطح ابتدایی متمرکز بودند. Şahin et al (2016) دانش محتوایی پداگوژی دبیران دوره متوسطه را مورد بررسی قرار دادند. Danisman & Tanisli(2017)، به همراه(2017) Özdemir & Soyl، دانش محتوایی پداگوژی دبیران ریاضی ضمن خدمت دوره متوسطه را بررسی کردند. به طور کلی، برای هر نوع وضعیت دبیران، چه پیش از خدمت و چه ضمن خدمت در مقاطع مختلف تحصیلی باید ارزیابی داشته باشیم تا به بهبود کیفیت تدریس و ارتقا بخشی استانـــــداردهای برنامه ریزی درسی ریاضی کمک کنیم (Williams et al., 2018).

معلمان باید این توانایی را داشته باشند که بتوانند با در نظر گرفتن تفاوت های فردی دانش آموزان، موضوعات مختلف این درس را با استفاده از روش های متنوع تدریس آموزش دهند و میزان یادگیری آنها را از محتوا، مفاهیم و اصطلاحات تخصصی افزایش دهند که به این نوع دانش، دانش پداگوژی گفته می شود. Shulman (1986)دانش محتوایی پداگوژی را به عنوان دانشی متمایز از دو نوع دانش پداگوژی و دانش محتوا تبیین کرد که در عین حال، با هر دو نوع دانش مذکور نقاط مشترکی دارد. دانش محتوایی پداگوژی تعامل دانش محتوا و دانش پداگوژی است که صرفـــاً نمی تواند مجموعی از دو دانش اولیه

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

باشد. در واقع، دانش محتوایی پداگوژی نتیجه آمیختن دانش محتوا و پداگوژی است که به معلم کمک می کند موضوعات را برای آموزش، سازماندهی و تنظیم کند. به عبارتی، می توان گفت دانش محتوایی پداگوژی بدین مفهوم است که چه چیزی؛ یادگیری مباحث خاص را آسان یا سخت می کند و ادراکات و پیش مفاهیمی که دانش آموزان در سنین و زمینه های گوناگون برای یادگیری مباحث جدید با خود به همراه می آورند را برای معلم واضح نمایند. این دانـــــش ویژه، زمینه فهم رابطـــــه بین محتوا و پیش دانسته های دانش آموزان و روش های مـــــتنوع تدریس برای تدریس اثربخـــــش و موفـــــق را فراهم می کند (Mishra & Koehler, 2006). دانش پداگوژی و دانش محتوایی معلم از دانش های ضروری و موردنیاز برای تدریس اثربخش است. در قرن بیست و یکم، وجود ابزارهای متفاوت، ارتباطات متفاوت، اطلاعات مختلف و وظایف متنوع و پیچیده ضرورت استفاده از رویکردهای متنوع را در آموزش بالاخص در زمینه ریاضی و علوم را لازم می داند. Wiley (2004) بـــیان می کند که در هزاره جدید، معلم خوب، نه تنها باید از توانایی تعلیم دادن برخوردار باشد، بلکه باید برای انتخاب هوشمندانه استفاده از وسایل متنوع و نیز بهره گیری از فناوری های مربوط به تدریس، دارای مهارت و دانش کافی باشد؛ بنابراین معلمان نقش اساسی را در کیفیت آموزش به عهده دارند و علاقه معلم، در به کارگیری از این روش های جدید در آموزش و یادگیری نقش بسزایی را در پیشرفت تحصیلی دانش آموزان خواهد داشت. استفاده از رویکردهای جدید در زمینه تعلیم و تربیت می تواند به معلمان علوم و ریاضی کمک نماید تا توان مشاهده چالش های آینده در کلاس درس را داشته باشند. به منظور روبه رو ساختن دانش آموزان با چالش هایی که در زندگی آینده با آن روبه رو خواهند شد، می بایست معلمان و دانش آموزان قادر به استفاده از انواع رویکردهای جدید مطابق با نیازهای متنوع خود باشند (به نقل از Aftabi et al., 2019). توجـــــه به کیفیت و میزان بهره وری دانش محتوایی پداگوژی آموزشگران در دوران مدرسه می تواند آینده تحصیلی بسیاری از دانش آموزان را از لحاظ آموزشی- تربیتی تحت الشعاع قرار دهد. پیش از این، بیشتر بر دانش محتوایی و موضوعی دبیران در مدارس توجه می شد و لزوم بررسی کیفیت دانش محتوایی پداگوژی دبیـــــــران به جهت رفع نیازهای متنوع یادگیری فراگیران در موقعیت های آموزشی مختلف، بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. دانش اثبات و استدلال یکی از دانش هایی است که هر آموزشگر ریاضی در هر مقطع تحصیلی باید در آن قابلیت و توانمندی لازم را داشته باشد. ارائه مناسب دانش اثبات در فرآیند تدریس برای برخی از آموزشگران ریاضی سخت و چالشی است. برای برخی دیگر در واقع این امر ممکن نیست و ممکن است در فرآیند تدریس به صورتی فرمالیته از عین متن محتوای ریاضی انجام گیرد. آنچه که حائز اهمیت است، عدم توجه کافی به ارائه ایده های نو برای تسهیل ارائه دانش اثبات در فرآیند تدریس است. برخی از اثبات ها چالش برانگیز و برای دانش آموزان سخت است. ایده های نو می تواند فرآیند یاددهی- یادگیری اثبات در حساب، جبر و هندسه را آسان و لذت بخش سازد. مطالعات پیشین و بررسی های میدانی در داخل و خارج از کشور نشان داده است،

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

بسیاری از دانش آموزان از فرآیند اثبات در محتوای ریاضی دوری می کنند و آن را غیر ممکن می دانند و سعی در بخاطرسپاری طوطی وار مراحل اثبات دارند. این مهم نشات گرفته از فرآیند چالشی یاددهی اثبات است که آموزشگر نتوانسته است دانش و ایده ای نو در این فرآیند بکار گیرد. لذا توجه به بررسی کیفی دانش اثبات می تواند زمینه های آموزش کافی برای دبیران ریاضی را به صورت دوره ای در مدارس توسط متخصصان اجرایی گردد. از طرفی، دانش محتوایی پداگوژی دبیران ریاضی همزمان با ارائه دانش اثبات، می تواند شیوه های انتقال مفاهیم در فرآیند اثبات را تسهیل سازد. بررسی کیفیت دانش محتوایی پداگوژی دبیران ریاضی می تواند راهگشایی برای ارزشیابی کیفیت تدریس آنها در حوزه های مختلف درسی باشد. از آنجایی که هدف این پژوهش مباحث ریاضی است و حوزه تعریف شده در زمینه اثبات و دانش آن می باشد، لازم و ضروری به نظر می رسد که کیفیت دانش محتوایی پداگوژی و دانش اثبات در میان دبیران ریاضی بررسی گردد. دبیران ریاضی در دو دوره متوسطه اول و دوم با برخی از مباحثی در کتب درسی ریاضی مواجه می شوند که نیازمند دانش کافی در زمینه اثبات می باشد. دانش اثبات در سطح مناسب و کافی می تواند چالـــش های دانش آموزان را در زمینه استدلال های ریاضی مرتفع سازد. با توجه به مطالعات پیشین و بررسی های بعمل آمده، ابزار ارزشیابی در جهت بررسی کیفیت دانش محتوایی پداگوژی و دانش اثبات در میان دبیران ریاضی دوره متوسطه یافت نشد و لازم است در این زمینه ابزارسازی انجام گیرد. لذا با تکیه بر مبانی نظری و مطالعات پیشین، پژوهشگران به دنبال طراحی و هنجاریابی ابزاری در جهت ارزیابی دانش محتوایی پداگوژی با تاکید بر دانش اثبات دبیران ریاضی دوره متوسطه می باشند.

دانش محتوایی پداگوژی: تدریس فعالیتی پویا و همراه با چالش های غیر منتظره است. نظریه پردازان در این حوزه، دیدگاه های مختلفی در ارتباط با دانش تدریس از سوی معلمان ارائه دادند. دانش معلم در کلاس درس می تواند تعیین کننده سرنوشت تحصیلی دانش آموزان در آینده باشد. یکی از نظریه پردازان معروف؛(1986) Shulman در حوزه دانش معلمان، دیدگاه های خود را بیان کرده است. (1986) Shulman اعتقاد داشت که در تدریس، معلم باید فعالیتی دقیق و هوشمندانه داشته باشد. او دانش تدریس یک معلم را به چند طبـــــقه مجزا تقسیم بندی کرد: (الف) دانش عمومی پداگوژی، ب) دانش فراگیران و ویژگی های آنها، پ) آگاهی از زمینه آموزشی، ت) آگاهی از اهداف، ارزش های آموزشی و زمینه های فلسفی و تاریخی آنها، ج) دانش محتوا/موضوع، چ) دانش محتوای پداگوژی، و ح) دانش برنامه ریزی درسی. علاوه بر این، (1986) Shulman دانش محتوایی را به عنوان آگاهی از تمام اجزای برنامه درسی طراحی شده برای آموزش یک موضوع یا یک حوزه در یک سطح خاص، آگاهی از تنوع ابزارهای آموزشی موجود مرتبط با آن برنامه درسی و آگاهی از شرایط مناسب و نامناسب برای استفاده از یک ابزار آموزشی در یک موقعیت خاص تعریف می کند. با معرفی مفهوم دانش محتوایی پداگوژی، این باور که کسی که ریاضیات را به خوبی می‌داند، ریاضیات را به بهترین شکل می‌آموزد – زمانی که یک باور گسترده باشد – شروع به تغییر کرد. (1988) Tamir اجزای دانش محتوایی پداگوژی

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

را به شرح زیر توصیف کرد: الف) جهت گیری به تدریس، ب) دانش در مورد درک دانش آموزان، ج) دانش برنامه درسی، د) دانش ارزیابی، و ه) دانش از راهبردهای تدریس. به طور مشابه، Grossman (1990) دانش محتوایی پداگوژی را به شرح زیر توصیف کرد؛ دانش و عقاید معلمان در مورد اهداف آموزش یک موضوع به دانش آموزان سطوح مختلف، از جمله تصورات آنها در مورد ماهیت موضوع و اینکه چه موضوعاتی برای دانش آموزان مهم است، آگاهی از دانش قبلی دانش آموزان، پیش تصورات، تصورات غلط احتمالی و تصورات جایگزین، دانش برنامه درسی و مواد درسی، از جمله آگاهی از روابط درون یک موضوع و همچنین بین موضوعات، آگاهی از راهبردها و بازنمایی های آموزشی مختلف. از آنجایی که هدف پژوهش حاضر دانش محتوایی پداگوژی معلمان است، لذا به این نوع دانش می پردازیم، زیرا از میان این هفت طبقه بندی، دانش محتوایی پداگوژی معلم بسیار اهمیت دارد. زیرا هم دانش محتوا و هم بحث تربیت در میان است. دانش محتوایی پداگوژی از مهم ترین دانش های معلم در تدریس کلاس است. در واقع، طرح این موضوع، یک تحول عظیمی در زمینه برنامه ریزی درسی و دانش معلمان رقم می زند. Shulman (1986) اولین بار دانش محتوایی پداگوژی را معرفی کرد که شامل مفاهیم مهم حوزه موضوعی کلاس درس، توضیح و تفسیر هدف درس، مثال و شکل ها و تبیین آنها متناسب با ویژگی های فردی و پیش زمینه های دانش آموزان کلاس است (Van Dijek et al., 2009). معلمی که از دانش محتوایی پداگوژی برخوردار است می تواند به صورت اصولی کلاس درس را هدایت کند و می داند چگونه محتوای درس را سازماندهی، تفسیر و ارائه کند (Jalil et al., 2009). دانش محتوایی پداگـــوژی می تواند مجموعه ایی از موضوع های علمی منـــــــطبق با هدف کلاس درس و منطبق با دانـــــش و ویژگی های فردی دانش آموزان باشد. این ترکیب می تواند ایده آل های آموزشی را هویدا سازد، لذا این نوع دانش می تواند در حین تعلیم، تربیت توام با زمینه عملی را مهیا سازد (Khakbaz, 2010). دانش محتوای پداگوژی یکی از شکل‌های دانش حرفه‌ای معلمان در تدریس موضوعی است و دانش غنی آن در معلمان امکان آموزش مؤثر و بهبود عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان را فراهم می‌کند. چنین دانشی، مهارت و فن بین و دانش علمی معلم را به صورت تواما نشان می دهد (Fukaya et al., 2024). دانش محتوایی پداگوژی می تواند تحولات اساسی در برنامه ریزی درسی و تدریس معلم ایجاد کند. اکثریت معلما عمدتا از دانش محتوایی برخوردار هستند و تا حدودی معلمان از دانش محتوایی پداگوژی برخوردارند (Hanuscin & Lee, 2011). تدریس فقط تدریس محض محتوای درس نیست، توجه به ویژگی های فردی و مفهوم سازی محتوای تخصصی در کلاس درس منطبق با ویژگی های فردی دانش آموزان مهم تر از دانش موضوعی صرف است (Shulman, 1986). ویژگی‌های مربوط به آنچه دانش محتوایی پداگوژی را تشکیل می‌دهد، حتی از دانش محـــــتوای ریاضی متنوع تر و چالش برانگیزتر است (Depaepe et al., 2013). دانش محتوایی پداگوژی از دو جنبه تعریف می

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

شود: «آگاهی از تفکر ریاضی دانش آموزان و دانش تدریس ریاضیات. جنبه اولی شامل درک این است که چه چیزی یادگیری مفاهیم خاص را آسان یا دشـــــــوار می کند- تصورات و پیـــــش فرض هایی که دانش آموزان در سنین و زمینه های مختلف با خود به یادگیری می آورند» (Shulman, 1986, P 9). به عنوان مثال، توانایی تشخیص اینکه چرا دانش آموز برای درک یک مفهوم ریاضی خاص تلاش می کند، نشانگر دانش معلمان از تفکر ریاضی دانش آموزان است. «جنبه دوم، دانش تدریس ریاضیات، شامل دانستن راه‌های بازنمایی و فرمول‌بندی موضوعی است که آن را برای دیگران قابل درک می‌سازد» (Shulman, 1986, P 9). به عنوان نمونه، استفاده از نمایش و ترسیم مناسب موضوع جزیی از استراتژی آموزشی است، برای دانش آموزانی که در درک یک مفهوم ریاضی مشکل دارند؛ این نوعی از دانش معلم از تدریس ریاضیات است. تحقیقات تجربی در مورد اینکه آیا اینها از نظر نظری مهم هستند یا خیر انجام گرفته است. با این حال، شواهد تجربی در مورد میزان تفاوت این دانش و این مهارت ها با یکدیگر روشن نیست. برای پیشبرد نظریه سازی در مورد ماهیت تخصص در تدریس ریاضیات و بهبود برنامه های آموزش معلمان، بررسی های میدانی مفید هستند. کارهای میـــــدانی پیشین روی ابعاد محتوا و دانش محتوای آموزشی نتایج مـــــــتفاوتی به همراه داشته است (Copur-Gencturk et al., 2019). مفهوم سازی های متفاوتی از دانش معلمان، به ویژه دانش محتوایی آن ها، در میان معلمان پیش از خدمت در دوره متوسطه و هم در دوره ابتدایی مشاهده شد (Bleomeke et al., 2014؛ Kleickmann et al., 2015). به عنوان نمونه، مطالعات در میان معلمان مدارس ابتدایی نشان داده شد که کیفیت دانش محتوا و دانش محتوای پداگوژی معلمان به یک اندازه برآورد شد، از طرفی، در برخی از موارد، میزان دانش محتوای معلمان بیش از دانش محتوایی پداگوژی آن ها برآورد شده بود. مطالعات در میان معلمان ریاضیات دوره متوسطه نشان داده است که کیفیت دانش محتوا و دانش محتوای پداگوژی معلمان به یک اندازه برآورد نبود. سهم دانش محتوایی معلمان دوره متوسطه بر اساس مفاهیم استدلال ریاضی، اثبات ریاضی، حل مساله و موارد مشابه بیشتر از دانش محتوایی پداگوژی بود. به عبارتی، پیشرفت یک معلم دوره متوسطه بر اساس دانش محتوایی او بود (Bleomeke et al., 2014).

دانش اثبات: یکی از توانایی هایی که دانش آموزان در مطالعه ریاضی باید داشته باشند، توانایی استدلال ریاضی است. استدلال نقش مهمی در زمینه های آموزشی و محیط کار امروزی دارد، بنابراین هر دانش آموز باید استدلال ریاضی داشته باشد. در فعالیت های یادگیری، دانش آموزان آموزش می بینند و از آنها خواسته می شود که بتوانند منطقی، خلاقانه، کامل و مستقل فکر کنند. با توانایی های استدلال ریاضی، دانش آموزان می توانند تفکر، خلاقیت و آینده نگری خود را در یادگیری توسعه دهند (Van Vo & Csapo, 2020). اثبات ریاضی یک استدلال مهم ریاضی است، یک توالی به هم پیوسته از ادعاها در برابر یک ادعای ریاضی، که دارای مجموعه ای از گزاره های پذیرفته شده به عنوان گزاره درست است و نیازی به توجیه ندارد، و از اشکال استدلالی شناخته شده و معتبر، و نیز اشکال بیان مناسب در ارتباط

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

استفاده می کند (Stylianides, 2016). توسعه مهارت های اثبات نه تنها در ریاضیات مهم است، بلکه در بین اهداف اولیه برنامه درسی تدریس ریاضیات نیز مهم است (NCTM, 2000). استدلال و اثبات به دانش آموزان کمک می کند تا دانش قبلی خود را با دانش جدید مرتبط کنند، استنتاج کنند و دانش جدید خود را معنادار سازند (Brodahl et al., 2020). بنابراین، یادگیری و اثبات تدریس در آموزش ریاضیات حیاتی است (Yan, 2017). استدلال فرآیندی فکری در نتیجه گیری بر اساس حقایق یا مقدماتی است که درست در نظر گرفته می شود. توانایی استدلال ریاضی توانایی است که تفکر و استدلال را در نتیجه گیری، حتی انتقال اطلاعات، ایده ها از طریق شفاهی و نوشتاری تربیت می کند (Adilla & Nurhabibah، 2020).

معلمان ریاضی در سراسر جهان از این موضوع حمایت می کنند که اثبات بخشی از تجربیات ریاضی دانش آموزان باشد. مطالعات پیشین نشان می‌دهند که دانش‌آموزان توانایی محدود و فرصت های مشارکت در اثبات را دارند. بسیاری از چالش های دانش آموزان ناشی از درک ناقص معلمان ریاضی از اثبات است و مشکلات دانش آموزان در اثبات را نادیده می گیرند. معلمان ریاضی در دوره متوسطه اغلب اثبات را به تأیید فرمول ها در هندسه دبیرستان محدود می کنند و از نقش توضیحی که اثبات می تواند در یادگیری ریاضیات در همه سطوح ایفا کند، غفلت می کنند. علاوه بر این، معلمان ریاضی اغلب بر شکل و نه ماهیت یک اثبات تمرکز می کنند و در ارزیابی شواهد ارائه شده به صورت شفاهی یا تصویری مشکل دارند (Dickerson & Doerr, 2014). معلمان ریاضی در دوره متوسطه مانند دانش‌آموزان خود، باید درک کنند که برخی از شواهد (شواهدی که توضیح می‌دهند) نسبت به سایرین (شواهدی که ثابت می‌کنند) روشن‌تر هستند که چرا چیزی باید درست باشد. این یافته ها نشان می‌دهد که تقویت نقش اثبات در سطوح پایه و حوزه‌های ریاضی مستلزم یادگیری قابل توجهی از معلمان است. با این حال، تحقیقات کمی در مورد جزئیات آنچه معلمان باید در مورد اثبات بدانند یا اینکه چگونه توسعه حرفه ای ممکن است چنین یادگیری را فراهم کند، وجود دارد (Stylianides & Silver, 2009). چارچوب هایی برای توصیف این دانش مورد نیاز است تا فرصت های یادگیری بیشتری برای معلمان فراهم شود. این دیدگاه نسبت به دانش اثبات با نظریه‌های یادگیری موقعیتی سازگار است که رابطه جدا نشدنی بین شناخت و زمینه‌های اجتماعی یا فیزیکی را که در آن دانش به دست می‌آید یا به آن دسترسی پیدا می‌کند، برجسته می سازد (Putnam & Borko, 2000). دو مثال مربوط به دانش معلم از اثبات، این پیچیدگی را نشان می دهد. در یک مطالعه،(2004) .Peressini et al مستند کردند که چگونه یک معلم مبتدی، درک پیچیده و ناقصی از اثبات را در سطوح بالاتر تحصیلی از خود همچون در دانشگاه نشان داد. با این حال، در یک موقعیت آموزشی دیگر، همان معلم، دیدگاه بسیار متفاوتی از اثبات نشان داد و به دانش‌آموزان اجازه داد تا فرمول مساحت یک دایره را از طریق یک فعالیت نظامند، اثبات کنند. معلمان

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

باید بتوانند مشکلات دانش آموزان در توانایی های استدلال ریاضی را درک کنند تا با ارائه راهنمایی و آموزش به دانش آموزان برای کار بر روی مسائل استدلال ریاضی راه حلی پیدا کنند. مشاهده دانش‌آموزان در مرحله کاوش و خلاصه سازی ریاضیات به معلمان کمک می‌کند تا توجه کنند و در نظر بگیرند که چگونه دانش آموزان می‌توانند حدسیه ها را اثبات کنند، حدسیه ها را توجیه کنند، و دلایل خود را هنگام پاسخ به تکالیف چالش برانگیز توضیح دهند (Livy & Downton, 2018). اثبات مستلزم گفت‌وگوی بین عوامل در قضیه/مساله برای روشن شدن مراحل استنتاج مبهم، برطرف کردن شکاف‌ها، یا آشکار کردن مفروضات ضمنی است. از این رو، استدلال جزء جدایی ناپذیر فرآیند کشف برای اثبات های ریاضی است. این کار نشان می‌دهد که چگونه می‌توان نظریه‌های استدلال را برای توصیف ویژگی‌های غیررسمی خاص در توسعه رویدادهای اثباتی به کار برد (Almpani et al., 2023). آشنایی دانش آموزان نسبت به مفهوم اثبات با توجه به تعاریف و ایده های اساسی لازم می تواند به عنوان نقطه مرجع برای هدایت دانش آموزان نسبت به اثبات آنها باشد. به عنوان مثال، چه زمانی می‌خواهیم اثباتی را توسعه دهیم، یا باید استدلال را هدف قرار دهیم؟ باید چارچوبی برای یادگیرندگان در نظر گیریم تا در مورد این دانش و چگونگی اجرای آن تأمل داشته باشند و ارزیابی کنند. برای نمونه، آیا باید این استدلال را به عنوان یک اثبات حساب کنیم؟ اگر نه، چگونه می‌توانیم آن را اصلاح کنیم یا آن را بهبود بخشید؟ (Campbell & King, 2020). با این حال، این بدان معنا نیست که پس از ارائه معیارهای اثبات، دانش آموزان کلاس درس هر معیار را به همان روش یا همانطور که معلم ریاضی در نظر گرفته است، تفسیر کنند. در واقع، حتی پژوهشگران آموزش ریاضی دیدگاه های متفاوتی در مورد معنای برخی از اصطلاحات کلیدی مانند «تبیین» دارند که می‌توانند به طور بالقوه در فرمول بندی معیارهای اثبات استفاده شوند. معنای این معیارها همچنان باید به صورت اجتماعی در یک کلاس مورد مذاکره قرار گیرد – هم در زمان معرفی معیارها و هم در طول زمان، هم در طول اعمال معیارها در اثبات – تا به تدریج از ظهور یک درک مشترک حمایت شود (Stylianides, 2007). در مورد توسعه مفهومی عملیاتی اثبات توسط یادگیرندگان، مشخص است، هنگامی که یادگیرندگان نیاز به یادگیری در مورد اثبات دارند، باید با معیارهای اثبات آشنا شوند تا ملاحـــظات خاصی را در فرآیند اثبات برآورده کنند. انتظار می رود که دانش آموزان حداقل در ابتدا این معیارها را به روش های مختلف تفسیر و استفاده کنند. این معیارها اساس و نقطه شروع کار مرتبط با اثبات های بعدی دانش آموزان را تشکیل می‌دهند. برای توسعه و بهبود دانش اثبات، مواردی باید در نظر گرفته شوند: ۱) صداقت در انجام ریاضی، ۲) مناسب بودن زمینه، و ۳) حمایت از منطق ریاضی از طریق توجیه /اعتقاد و توضیح. مورد دوم دلالت بر این دارد که معیارهای خاصی نمی توانند به طور کلی در مراحل مختلف اثبات اعمال شوند، در حالی که موارد اول و سوم دلالت بر این دارند که معیارهای اصلاح شده به صورت متنی همچنان باید برخی از اصول اساسی را رعایت کنند. چارچوب تدریس دانش ریاضی برای اثبات تلاش می کند تا این دانش متفاوت را به تفصیل شرح دهد. برای پیشبرد تدریس

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

ریاضی با هدف اثبات، پژوهش هایی در مورد مشکلات دانش‌آموز و معلم در زمینه اثبات و همچنین مطالعات مربوط به فعالیت اثبات در کلاس درس برای شناسایی محتوای ریاضی دانش تدریس اثبات تدریس مورد بررسی قرار گرفتند (Lesseig, 2011). سپس چارچوب تدریس دانش ریاضی برای اثبات راه هایی را مشخص می‌کند که معلمان دانش خود را برای اثبات در دو حوزه موضوعی دانش محتوای مشترک و دانش محتوای تخصصی و دو حوزه آموزشی دانش محتوا و دانش‌آموزان، و دانش محتوا و تدریس در نظر گیرند. دانش محتوا به دانش دانش‌آموزان از تصورات معمولی یا تصورات نادرست از اثبات و همچنین درک توالی‌های رشد در اثبات اشاره دارد. محققان از تعدادی چارچوب برای دسته بندی اثبات های دانش آموزان و توصیف پیشرفت از توجیهات استقرایی یا تجربی به سمت استدلال های قیاسی استفاده کرده اند (Lannin, 2005. طبقه بندی طرح اثبات توسعه یافته توسط (2007) Harel & Sowder یکی از جامع ترین تحقیقات آموزش ریاضیات است. طبق نظر آنها، اثبات شامل چیزی است که برای آن، شخص متقاعد می شود (قانع کردن خود) و و سپس متقاعد می کند (متقاعد کردن دیگران). این واقعیت که سطح پایین پیشرفت و تسلط دانش آموزان در ریاضیات غیر قابل انکار است. اکثر دانش‌آموزان تمایل دارند فقط فرمول ریاضی را بدون هیچ گونه درک مفهومی از آن به خاطر بسپارند. این ادعا با نظرسنجی TIMSS[1] در سال ۲۰۱۵ پشتیبانی می شود، به ویژه در ریاضیات که بررسی ها نشان می دهد وضعیت کشورهای در حال توسعه مناسب نیست (Mullis, 2016). طرحواره های اثـــبات به طور گسترده به عنوان طرحواره های مبتنی بر موقعیت بیرونی، تجربی یا تحلیلی طبقه بندی می‌شوند. طرح های اثبات بیرونی، طرحواره هایی هستند که در آنها شخص توسط یک مرجع یا شکل نمادین و تشریفاتی ارائه استدلال متقاعد می‌شود. طرحواره های اثبات تجربی مبتنی بر مشاهدات ادراکی یا استدلال استقرایی هستند که در آن عبارات با آزمایش تعدادی مثال تأیید می‌شوند. در نهایت، در یک طرح اثبات تحلیلی، حدسیه ها با استفاده از استنتاج های منطقی تأیید می شوند و بنابراین به عنوان اثبات در جامعه ریاضی پذیرفته می شوند. برای معلـــمان ریاضی مهم است که بدانند چرا در حالی که نه طرحواره های بیرونی و نه طرحواره های اثبات تجربی با استانداردهای ریاضی در زمینه اثبات سازگار نیستند، اما هر دو در کار با دانـــش‌آموزان استفاده می شوند (Kuchemann & Hoyles, 2009). دانش صریح این طبقه‌بندی، یا طبقه‌بندی مشابه مبتنی بر پژوهش در مورد تفکر دانش‌آموز، از توانایی معلمان برای تفسیر تفکر دانش‌آموز و تصمیم‌گیری در مورد آموزش بعدی پشتیبانی می‌کند. عناصر دیگری در دانش محتوا به توانایی معلمان برای ارزیابی استدلال های دانش آموز در رابطه با استانداردهای ریاضی اثبات وجود دارد. این امر به آگاهی از تعاریف، اشکال بازنمایی و استدلالی نیاز دارد که مناسب و در سطح قابل دسترسی

[1] . Trends in International Mathematics and Science Study

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

باشند. در نهایت، دانش محتوا و دانش اثبات باید با اصول و استراتژی های آموزشی در هم آمیخته شود. دانش محتوا برای اثبات شامل روش‌های بازنمایی، توضیح یا پیوند ایده‌های اثباتی و همچنین روش‌های پاسخگویی به مشارکت های دانش‌آموز است. به عنوان مثال، برای حمایت از توانایی دانش‌آموزان برای حرکت فراتر از توجیه اقتدارگرایانه یا تجربی به سمت مفاهیم پیچیده تر اثبات. معلمان ابتدا باید تشخیص دهند که چگونه روش‌های پاسخ به سؤالات و پاسخ به دانش‌آموزان با طرحواره های اثباتی که دانش‌آموزان توسعه می‌دهند، ارتباط دهند. علاوه بر این، معلمان باید بدانند که چه مثال‌هایی ارائه کنند یا چه سؤالاتی مطرح کنند تا دانش‌آموزان را بر ایده‌های اثباتی کلیدی متمرکز کنند، و توجیه بیشتری را به دست آورند، یا تفکر دانش‌آموز را به سمت یک مورد کلی گسترش دهند (Bieda, 2010).

Mahdavi et al. (2021) در پژوهشی در ارتباط با بررسی مولفه های دانش محتوایی پداگوژی دانشجو معلمان دانشگاه فرهنگیان نتیجه گرفتند که مدرسان دانشگاه با ایجاد فرصت هایی برای یادگیری تجویز شده، خودپنداره دانشجو معلمان ارتقا پیدا کرد. به عبارتی، مدرسان دانشگاه، فرصت های یادگیری را برای دانشجو معلمان فراهم ساختند تا اصل خود پنداره آنها در فرایند یادگیری، همچون یادگیرنده وابسته، معنا پیدا کند. همچنین برای بهبود دانش محتوایی پداگوژی، مسئولیت های تعریف شده ای به دانشجومعلمان ارائه گردید تا به بازسازی دانش محتوایی پداگوژی آنها پرداخته شود. لذا با روش تدریس مشارکتی با هدف رشد و توسعه حرفه ای دانشگاهی، اجتماعی و معنوی دانشجو معلمان، فضایی برای ارتقای رشد دانشجو معلـــمان بر انتقال دانش و زمینه ای برای برانگیختن تخیل/ تجسم، تقویت حس کنجکاوی برای ساخت قلمروی دانش پداگوژی محتوا فراهم گردید.

Manero & Arnal-Bailera (2021) در پژوهشی در ارتباط با درک تجارب مربوط به اثبات در دبیران ریاضی پیش از خدمت در دوره متوسطه بر اساس سطوح ون هیل در رابطه با اثبات در هندسه نتیجه گرفتند تفاوت هایی در تدریس چگونگی اجرای اثبات در هندسه دبیرستان مشاهده شد. چنین تفاوت هایی منجر به بازخوردهای متفاوت در دانش آموزان می شود و همچنین متعاقبا در پیشرفت یادگیری آنها در اثبات نیز تفاوت هایی مشاهده گردید.

Saleh Moh’d et al. (2021) در پژوهشی در ارتباط با ارزشیابی سطوح دانش محتوایی پداگوژی دبیران ریاضی دوره متوسطه نتیجه گرفتند که این مطالعه یافته‌های پژوهشی ترکیبی را گزارش می‌کند که سطح دانش محتوای پداگوژی ۶۹ دبیر ریاضی را در مدارس متوسطه ارزیابی نمود. مطالعه بر اساس پرسشنامه نشان داد که سطح دانش محتوای پداگوژی دبیران ریاضی در حد متوسط بود. با این حال، تفاوت معنی داری در سطوح دانش محتوای پداگوژی بر اساس سطح تحصیلات معلم و سابقه تدریس مشاهده شد، در حالی که تفاوت معنی داری در تخصص معلمان و تفاوت در سطح دانش محتوای پداگوژی آنها نشان داده نشد. یافته‌های مبتنی بر مشاهده نشان می‌دهد که سطح دانش محتوای پداگوژی در تمرین‌های کلاس درس پایین است. این نشان دهنده چالش معلمان در اجرای دانش محتوای پداگوژی

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

در کلاس درس است. بنابراین، نیاز به آموزش ضمن خدمت بیشتر در مورد بالا بردن سطح دانش محتوای پداگوژی معلمان وجود دارد که در نهایت منجر به بهبود آموزش و یادگیری ریاضیات خواهد شد.

Seyyedkalan et al. (2020) در پژوهشی در ارتباط با واکاوی تجارب نومعلمان دانشگاه فرهنگیان از دانش محتوایی پداگوژی با بررسی در میان ۲۵ نو معلم نتیجه گرفتند که ذهنیات و میزان ادراکات دانشجو معلمان، نحوه تدریس در حالت کنش و واکنش- گفتمان های کلاسی و تعامل آموزش در قالب کنش ها و تعاملات انسانی در کلاس درس و نتایج بازخوردهای حاصل از ذهنیات و تعاملات کلاسی که بخشی از دانش محتوایی پداگوژی است با توجه به نظریان فلسفی، سواد چندگانه و بحث های روانشناختی نومعلمان شکل می گیرد و ارتقا می یابد. لذا دانش محتوایی پداگوژی به عنوان تلفیق دانش و هنر معلمی در نظام آموزش و پرورش در نظر گرفته می شود.

Moosapour (2019) در پژوهشی در ارتباط با چرایی اثبات در ریاضی دوران مدرسه نتیجه گرفت که تجارب تدریس و مطالعات مربوط به تدریس در گذشته نشان داد که در دوران مدرسه، دانش آموزان به استنتاج و استقرا به صورت تجربی نیاز دارند و در واقع اثبات در بطن محتوای ریاضی مدرسه ای است. اثبات می تواند ریاضی واقعی را به دانش آموزان در دوران مدرسه نشان دهد و تجربه های واقعی را با استدلال و برهان پیش گیرند.

Noto et al. (2019) در پژوهشی در ارتباط با اثبات ریاضی- موانع یادگیری دبیران ریاضی نسبت به اثبات در هندسه، چندین مطالعه مرتبط با اثبات ریاضی توسط بسیاری از محققان بر روی مواد سطح بالا انجام شده است، اما هنوز در مورد هندسه مطالعه ای صورت نگرفته است. با بررسی مطالعات در ارتباط با اثبات در ریاضی و هندسه نتیجه گرفتند که مطالعات کافی درباره اثبات در هندسه انجام نگرفته است. آنها با بررسی در میان معلمان پیش از خدمت و تدریس آنها در زمینه هندسه نتیجه گرفتند که موانعی در اجرای اثبات در مدارس وجود دارد. از جمله؛ موانع یادگیری مرتبط با دشواری در کارگیری مفهوم مربوط به تجسم شی هندسی، وجود موانع در تعیین اصل مربوط به درک مسئله و موانع مرتبط در برهان های ریاضی مانند عدم درک و عدم توانایی در بیان تعریف، ندانستن استفاده از تعریف برای ساختن اثبات، عدم درک استفاده از زبان و نماد ریاضی، ندانستن نحوه شروع اثبات.

روش شناسی پژوهش

نوع پژوهش توصیفی- تحلیلی بوده است که به روش پیمایشی با تکیه بر هنجاریابی انجام گرفت. در این پژوهش با تکیه بر مبانی نظری و پیشـــــینه های مربوطه در حوزه دانش محتوایی پداگوژی و دانش اثبات، مولفه هایی در نظر گردید و سپس بر اساس مولفه ها، گویه هایی تنظیم و طراحی شد و به شیوه پیمایشی توسط متخصصین مورد پرسش قرار گرفت.

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

جامعه ی آماری این پژوهش شامل ۴۲۰ دبیر ریاضی زن و مرد شاغل به خدمت در دوره اول و دوم متوسطه در مدارس دولتی و غیردولتی در شهرستان جنوب و جنوب غربی و جنوب شرقی استان تهران بودند که از این میان، شهرستان های پیشوا، پاکدشت، قرچک، کهریزک، ورامین و ری از استان تهران در سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲ در مد نظر قرار گرفت است. از آن جایی که هدف بررسی و هنجاریابی ابزار اندازه گیری دانش محتوایی و پداگوژی و دانش اثبات بود، گویه های طراحی شده بر اساس نظرات متخصصین در حوزه آموزش ریاضی پرسیده شد. لذا روش نمونه گیری شبه خوشه ای و نمونه گیری بر اساس جدول کریسی- مورگان، ۲۰۰ نفر بود.

ابزار اندازه گیری: در این شیوه، پژوهشگران بر اساس مبانی نظری و مطالعات پیشین در حوزه دانش اثبات و دانش محتوایی پداگوژی معلمان ریاضی، مولفه هایی را در مد قرار داده و بر اساس آن مولفه ها، به ابزارسازی و در نهایت به اعتبار سنجی و هنجاریابی آن پرداختند. برای این منظور، در ابتدا پرسشنامه ای توسط پژوهشگران در ۳۶ گویه تهیه شد. مولفه مربوط به دانش محتوایی پداگوژی برگرفته از پژوهش Kadarisma et al.(2019) است که در حوزه دانش محتوایی پداگوژی انجام گرفته است و مولفه های مربوط به دانش اثبات با تکیه بر دانش محتوایی پداگوژی بر گرفته از پژوهش(2016) Lesseig در زمینه دانش ریاضی برای تدریس اثبات در یک رشد و توسعه حرفه ای دوران مدرسه، طراحی و ساخته شد. لذا در ابتدا پس از جمع آوری داده ها از نمونه هایی از دبیران ریاضی، از شاخص نسبت روایی محتوایی با عنوان CVR[1] استفاده گردید. در محاسبه CVR دبیران با سابقه ریاضی و اساتید دانشگاه در زمینه آموزش ریاضی تناسب هر گویه را بر اساس یک طیف چهار بخشی لیکرتی تعیین کردند. برای متخصصان، تعاریف و مفاهیم مربوط به پرسشنامه تعریف و تبیین گردید. پس از اجرای مرحله اول، در مرحله دوم به عنوان نتیجه گیری و تثبیت ابزارسازی، تعدادی از گویه ها حذف شدند، برخی تعدیل شدند. بر این اساس، از ۳۶ گویه اولیه، پس از بررسی و تحلیل مقادیر CVR ، شش گویه حذف شدند و ۳۰ گویه به تثبیت رسیدند. در نهایت پس از بررسی روایی محتوایی، بخش تحلیل عامل اکتشافی مورد بررسی قرار گرفت تا مولفه ها و پرسشنامه در حالت های جزیی و کلی هنجاریابی شود. بخش اول پرسشنامه حاوی اطلاعات جمعیت شناختی و بخش دوم حاوی ۳۰ گویه با مقیاس های لیکرت؛ خیلی کم، کم، متوسط، زیاد، خیلی زیاد می باشد. پرسشنامه در قالب فرم الکترونیکی برای تسهیل در دسترسی دبیران ریاضی در سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲ در اختیار آنها گذاشته شد. بررسی پایایی مولفه ها و پرسشنامه در بخش تحلیل عاملی اکتشافی انجام گرفت.

1. Content Validity Index

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

یافته ها

داده ها پس از جمع آوری در دو بخش اطلاعات جمعیت شناختی و بخش تحلیل عاملی از طریق نرم افزار SPSS بررسی و تحلیل شدند. در بخش تحلیل عاملی اکتشافی پایایی عامل ها نیز مورد بررسی قرار گرفتند.

جداول ۱ الی ۳ حاوی اطلاعات مربوط به بخش جمعیت شناختی ۲۰۰ دبیر ریاضی مورد مطالعه است:

جدول ۱. فراوانی و درصد جنسیت دبیران ریاضی

شاخص‌ها / جنسیت	فراوانی	درصد
زن	۱۱۵	۰/۵۷
مرد	۸۵	۰/۴۳
کل	۲۰۰	۱۰۰

نتایج جدول ۱ نشان می‌دهد غالب دبیران ریاضی مورد مطالعه، زن هستند. بیشترین درصد فراوانی مربوط به دبیران زن است (۵۷٪).

جدول ۲. فراوانی و درصد تحصیلات دبیران ریاضی

شاخص‌ها / تحصیلات	فراوانی	درصد
کارشناسی	۹۱	۰/۴۶
کارشناسی ارشد	۹۴	۰/۴۷
دکتری	۱۵	۰/۰۷
کل	۲۰۰	۱۰۰

نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد اکثریت دبیران ریاضی مورد مطالعه، دارای مدرک کارشناسی ارشد هستند (۴۷٪). کمترین سهم مربوط به دارندگان مدرک دکتری است (۷٪).

جدول ۳. فراوانی و درصد سابقه تدریس دبیران ریاضی

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

شاخص‌ها / سابقه تدریس	فراوانی	درصد
کمتر از ۵ سال	۲۱	۰/۱۰
بین ۶ تا ۱۰ سال	۳۲	۰/۱۶
بین ۱۱ تا ۱۵ سال	۸۶	۰/۴۳
بالاتر از ۱۵ سال	۶۱	۰/۳۱
کل	۲۰۰	۱۰۰

نتایج جدول ۳ نشان می‌دهد اکثریت دبیران ریاضی مورد مطالعه، دارای سابقه تدریس بین ۱۱ الی ۱۵ سال هستند (۴۳٪). بعد از آن، کمترین سهم مربوط به دبیران با سابقه تدریس کمتر از ۵ سال هستند (۱۰٪).

بررسی امکان تحلیل عاملی اکتشافی

در مطالعه حاضر و پس از طراحی گویه ها و روایی آنها، ۳۰ گویه برای سنجش متغیرها طراحی گردید. برای بررسی امکان تحلیل عاملی اکتشافی از شاخص KMO استفاده می شود. در شاخص KMO و نتیجه آزمون بارتلت که تقریبی از آماره کای دو است در جدول ۴ تعیین شده اند:

جدول ۴. نتایج آزمون بارتلت

KMO: شاخص کفایت نمونه گیری	۰/۸۱
آزمون بارتلت: مقدار کای دو	۳۲۷۹/۰۱
P- مقدار	۰/۰۰۰

در جدول ۴ از آنجایی که شاخص KMO بالای ۸۰ درصد است و این مقدار بیشتر از ۰/۷ و نزدیک به یک است، تعداد نمونه برای تحلیل عاملی کافی است. P- مقدار آزمون بارتلت کوچک تر از ۰/۰۱ است که نشان می‌دهد تحلیل عاملی برای شناسایی ساختار مدل عاملی مناسب است.

تعیین سهم عامل ها در تبیین واریانس گویه ها

در جدول ۵، اشتراکات اولیه و استخراجی را نشان می‌دهیم. هدف از اشتراک اولیه مقدار کل واریانس یک عامل می‌باشد که مجموعه عوامل، می‌توانند آن را تبیین و تعریف کنند. درصد واریانس استخراجی جزیی از واریانس هر عامل است که مجموعه عوامل توانستند آن مقدار را استخراج کنند:

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

جدول ۵. نتایج اشتراکات اولیه و استخراجی

سوالات	اشتراک اولیه	اشتراک استخراجی	سوالات	اشتراک اولیه	اشتراک استخراجی
سؤال ۱	۱/۰۰	۰/۷۹	**سؤال ۱۶**	۱/۰۰	۰/۸۴
سؤال ۲	۱/۰۰	۰/۸۲	**سؤال ۱۷**	۱/۰۰	۰/۵۹
سؤال ۳	۱/۰۰	۰/۸۰	**سؤال ۱۸**	۱/۰۰	۰/۷۳
سؤال ۴	۱/۰۰	۰/۸۳	**سؤال ۱۹**	۱/۰۰	۰/۷۴
سؤال ۵	۱/۰۰	۰/۶۰	**سؤال ۲۰**	۱/۰۰	۰/۷۵
سؤال ۶	۱/۰۰	۰/۷۱	**سؤال ۲۱**	۱/۰۰	۰/۷۲
سؤال ۷	۱/۰۰	۰/۷۳	**سؤال ۲۲**	۱/۰۰	۰/۶۱
سؤال ۸	۱/۰۰	۰/۵۹	**سؤال ۲۳**	۱/۰۰	۰/۵۸
سؤال ۹	۱/۰۰	۰/۶۴	**سؤال ۲۴**	۱/۰۰	۰/۵۷
سؤال ۱۰	۱/۰۰	۰/۶۴	**سوال ۲۵**	۱/۰۰	۰/۷۹
سؤال ۱۱	۱/۰۰	۰/۶۷	**سوال ۲۶**	۱/۰۰	۰/۸۴
سؤال ۱۲	۱/۰۰	۰/۶۴	**سوال ۲۷**	۱/۰۰	۰/۷۹
سؤال ۱۳	۱/۰۰	۰/۷۱	**سوال ۲۸**	۱/۰۰	۰/۸۲
سؤال ۱۴	۱/۰۰	۰/۸۳	**سوال ۲۹**	۱/۰۰	۰/۸۰
سوال ۱۵	۱/۰۰	۰/۷۹	**سوال ۳۰**	۱/۰۰	۰/۸۳

در جدول ۵، هر چه مقدار اشتراکات استخراجی بزرگتر و نزدیک یک باشد، عامل‌های استخراج شده، می توانند هر عامل را بهتر تبـــــــیین کنند. در جدول ۵ تعیین گردید که مقادیر اشتراکات استخراجی اکثریت گویه ها بزرگتر از ۵۰ درصد است.

تعیین سهم هر عامل در تبیین مجموع واریانس تمام عامل ها

در جدول ۶ مشاهده می‌شود که قسمت اول مربوط به مقادیر ویژه عوامل استخراجی بدون دوران است و قسمت دوم مربوط به مقادیر ویژه عوامل استخراجی با دوران می‌باشد:

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

جدول ۶. نتایج واریانس کل

	مقدار ویژه اولیه			مجموع بارهای عاملی استخراج شده			مجموع بارهای عاملی دوران یافته		
عامل ها	کل	درصدواریانس	درصدتجمعی	کل	درصدواریانس	درصدتجمعی	کل	درصدواریانس	درصدتجمعی
۱	۱۰/۵۲	۳۵/۰۹	۳۵/۰۹	۱۰/۵۲	۳۵/۰۹	۳۵/۰۹	۹/۲۸	۳۰/۹۵	۳۰/۹۵
۲	۶/۶۰	۲۲/۰۱	۵۷/۱۱	۶/۶۰	۲۲/۰۱	۵۷/۱۱	۶/۱۹	۲۰/۶۴	۵۱/۶۰
۳	۲/۰۹	۶/۹۷	۶۴/۰۹	۲/۰۹	۶/۹۷	۶۴/۰۹	۲/۵۱	۸/۳۷	۵۹/۹۷
۴	۱/۵۱	۵/۰۵	۶۹/۱۴	۱/۵۱	۵/۰۵	۶۹/۱۴	۲/۰۶	۶/۸۷	۶۶/۸۵
۵	۱/۲۰	۴/۰۲	۷۳/۱۷	۱/۲۰	۴/۰۲	۷۳/۱۷	۱/۸۹	۶/۳۱	۷۳/۱۷

همانطور که در جدول ۶ مشخص گردید؛ پنج عامل دارای مقادیر ویژه بزرگتر از یک هستند و با استفاده از این نتایج می‌توان گفت اگر تعداد عامل‌های استخراجی را پنج عامل در نظر بگیریم، ۷۳ درصد از واریانس کل عامل ها تبیین می شوند.

تفکیک عامل ها – ضریب همبستگی بین عامل ها

بر طبق تحلیل های عاملی، تفسیر بارهای عاملی بدون دوران امکان پذیر نیست، بنابراین، عامل‌ها را در جدول ۷ دوران می دهیم تا قابلیت تفسیر آنها بهتر شود:

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

جدول ۷. نتایج ماتریس دوران یافته

سوالات	عامل‌ها					سوالات	عامل‌ها				
	۱	۲	۳	۴	۵		۱	۲	۳	۴	۵
سؤال ۱		۰/۸۵				سؤال ۱۶	۰/۸۸				
سؤال ۲		۰/۸۹				سؤال ۱۷	۰/۷۹				
سؤال ۳		۰/۸۷				سؤال ۱۸	۰/۸۴				
سؤال ۴			۰/۵۷			سؤال ۱۹	۰/۷۰				
سؤال ۵			۰/۶۵			سؤال ۲۰	۰/۸۲				
سؤال ۶			۰/۷۶			سؤال ۲۱	۰/۸۳				
سؤال ۷				۰/۵۵		سؤال ۲۲	۰/۶۹				
سؤال ۸	۰/۴۰					سؤال ۲۳	۰/۷۵				
سؤال ۹				۰/۷۳		سؤال ۲۴	۰/۶۸				
سؤال ۱۰	۰/۵۷					سؤال ۲۵	۰/۶۸				
سؤال ۱۱				۰/۶۱		سؤال ۲۶	۰/۸۸				
سؤال ۱۲					۰/۷۶	سؤال ۲۷	۰/۷۴				
سؤال ۱۳					۰/۷۳	سؤال ۲۸	۰/۸۰				
سؤال ۱۴					۰/۸۲	سوال ۲۹	۰/۶۰				
سوال ۱۵	۰/۶۸					سوال ۳۰	۰/۷۱				

جدول ۷ ماتریس دوران داده شده اجـــزا با کمک روش دوران واریمکس می باشد. نتایج نشان می‌دهد که پس از استخـــراج عامل های قرار گرفته، میزان همخوانی مفهوم عامل قرار گرفته شده با یکدیگر بررسی می شوند که به دلیل عدم تجانس، برخی از گویه ها از یک عامل به عامل دیگر منتقل شدند. در جدول ۷، همانطور که مشاهده می شود، گویه ۸ و گویه ۱۰ در عامل ۴ قرار نگرفتند و به عامل ۱ منتقل شدند.

بررسی امکان تحلیل عاملی اکتشافی پس از تعدیل گویه ها

پس از تعدیل گویه های ۸ و ۱۰ و بررسی مجدد و بررسی امکان تحلیل عاملی اکتشافی، دوباره از شاخـــص KMO استفاده می شود. در شاخص KMO و نتیجه آزمون بارتلت که تقریبی از آماره کای دو است در جدول ۸ تعیین شده اند:

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

جدول ۸. نتایج آزمون بارتلت پس از تعدیل گویه ها

KMO: شاخص کفایت نمونه گیری	۰/۸۰
آزمون بارتلت: مقدار کای دو	۳۱۷۹/۰۲
P- مقدار	۰/۰۰۰

در جدول ۸ از آنجایی که شاخص KMO ۸۰ درصد است و این مقدار بیشتر از ۰/۷ و نزدیک به یک است، تعداد نمونه برای تحلیل عاملی کافی است. P- مقدار آزمون بارتلت کوچک تر از ۰/۰۱ است که نشان می‌دهد تحلیل عاملی برای شناسایی ساختار مدل عاملی مناسب است.

تعیین سهم عامل‌ها در تبیین واریانس پس از تعدیل گویه ها

در جدول ۹، اشتراکات اولیه و استخراجی را نشان می‌دهیم. هدف از اشتراک اولیه مقدار کل واریانس یک عامل می‌باشد که مجموعه عوامل، می‌توانند آن را تبیین و تعریف کنند. درصد واریانس استخراجی جزیی از واریانس هر عامل است که مجموعه عوامل توانستند آن مقدار را استخراج کنند:

جدول ۹. نتایج اشتراکات اولیه و استخراجی پس از تعدیل گویه ها

سوالات	اشتراک اولیه	اشتراک استخراجی	سوالات	اشتراک اولیه	اشتراک استخراجی
سؤال ۱	۱/۰۰	۰/۷۹	**سؤال ۱۶**	۱/۰۰	۰/۸۵
سؤال ۲	۱/۰۰	۰/۸۲	**سؤال ۱۷**	۱/۰۰	۰/۵۹
سؤال ۳	۱/۰۰	۰/۸۰	**سؤال ۱۸**	۱/۰۰	۰/۷۳
سؤال ۴	۱/۰۰	۰/۸۴	**سوال ۱۹**	۱/۰۰	۰/۷۶
سؤال ۵	۱/۰۰	۰/۶۱	**سؤال ۲۰**	۱/۰۰	۰/۷۶
سؤال ۶	۱/۰۰	۰/۶۹	**سؤال ۲۱**	۱/۰۰	۰/۷۳
سؤال ۷	۱/۰۰	۰/۷۲	**سؤال ۲۲**	۱/۰۰	۰/۶۲
سؤال ۸	۱/۰۰	۰/۵۸	**سؤال ۲۳**	۱/۰۰	۰/۵۷
سؤال ۹	۱/۰۰	۰/۶۲	**سؤال ۲۴**	۱/۰۰	۰/۵۷
سوال ۱۰	۱/۰۰	۰/۶۴	**سوال ۲۵**	۱/۰۰	۰/۷۹
سؤال ۱۱	۱/۰۰	۰/۶۶	**سوال ۲۶**	۱/۰۰	۰/۸۵
سؤال ۱۲	۱/۰۰	۰/۶۴	**سوال ۲۷**	۱/۰۰	۰/۷۹
سؤال ۱۳	۱/۰۰	۰/۷۰	**سوال ۲۸**	۱/۰۰	۰/۸۲
سؤال ۱۴	۱/۰۰	۰/۸۴	**سوال ۲۹**	۱/۰۰	۰/۸۰
سؤال ۱۵	۱/۰۰	۰/۷۹	**سوال ۳۰**	۱/۰۰	۰/۸۴

[Downloaded from journalieaa.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

در جدول ۹، هر چه مقدار اشتراکات استخراجی بزرگتر و نزدیک یک باشد، عامل‌های استخراج شده، می توانند هر عامل را بهتر تبـــــــیین کنند. در جدول ۹ تعیین گردید که مقادیر اشتراکات استخراجی اکثریت گویه ها تقریبا بزرگتر از ۵۸ درصد است.

تعیین سهم هر عامل در تبیین مجموع واریانس تمام عامل ها پس از تعدیل گویه ها

در جدول ۱۰ مشاهده می‌شود که قسمت اول مربوط به مقادیر ویژه عوامل استخراجی بدون دوران است و قسمت دوم مربوط به مقادیر ویژه عوامل استخراجی با دوران می‌باشد:

جدول ۱۰. نتایج واریانس کل پس از حذف گویه ها

	مقدار ویژه اولیه			مجموع بارهای عاملی استخراج شده			مجموع بارهای عاملی دوران یافته		
عامل ها	کل	درصدواریانس	درصدتجمعی	کل	درصدواریانس	درصدتجمعی	کل	درصدواریانس	درصدتجمعی
۱	۱۰/۵۱	۳۵/۰۶	۳۵/۰۶	۱۰/۵۱	۳۵/۰۶	۳۵/۰۶	۱۰/۵۱	۳۵/۰۶	۳۵/۰۶
۲	۶/۵۷	۲۱/۹۱	۵۶/۹۸	۶/۵۷	۲۱/۹۱	۵۶/۹۸	۶/۵۷	۲۱/۹۱	۵۶/۹۸
۳	۲/۱۱	۷/۰۴	۶۴/۰۳	۲/۱۱	۷/۰۴	۶۴/۰۳	۲/۱۱	۷/۰۴	۶۴/۰۳
۴	۱/۵۰	۵/۰۲	۶۹/۰۵	۱/۵۰	۵/۰۲	۶۹/۰۵	۱/۵۰	۵/۰۲	۶۹/۰۵
۵	۱/۲۱	۴/۰۴	۷۳/۰۹	۱/۲۱	۴/۰۴	۷۳/۰۹	۱/۲۱	۴/۰۴	۷۳/۰۹

همانطور که در جدول ۱۰ مشخص گردید پنج عامل دارای مقادیر ویژه بزرگتر از یک هستند و با استفاده از این نتایج می‌توان گفت اگر تعداد عامل‌های استخراجی را پنج عامل در نظر بگیریم، ۷۳ درصد از واریانس کل عامل ها تبیین می شوند.

همسانی درونی عامل ها پس از تعدیل گویه ها

تعیین همسانی درونی ابزار از طریق محاسبه آلفای کرونباخ مورد ارزیابی قرار گرفت. ضریب مورد پذیرش یکنواختی (همسانی درونی) باید برابر یا بالاتر از ۰/۷ باشد. تعیین همسانی درونی ابزار پس از روایی محتوایی از طریق محاسبه آلفای کرونباخ در نمونه‌ای شامل ۲۰۰ دبیر ریاضی مورد ارزیابی قرار گرفت و مقدار آلفای کل برای عامل اول تا پنجم به شرح جدول ۱۱ آمده است:

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

جدول ۱۱. نتایج پایایی هر عامل

سؤالات	آلفای کرونباخ
عامل اول	۰/۷۴
عامل دوم	۰/۷۱
عامل سوم	۰/۷۲
عامل چهارم	۰/۷۳
عامل پنجم	۰/۷۰

براساس نتایج جدول ۱۱ از طریق مقادیر آلفای کرونباخ نشان داده شد هر عامل پایایی با مقدار بالای ۷۰ درصد دارد که مقدار قابل قبولی است.

تفکیک عامل ها

در انتهای تحلیل های مربوطه، پس از دوران و تثبیت عامل ها و گویه ها، نتیجه نهایی در جدول ۱۲ مشخص گردید:

جدول ۱۲. ماتریس دوران یافته نهایی

محتوای گویه ها	عامل‌ها				
	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
اطلاع از ویژگی های طرحواره های اثبات های سطحی، تجربی و قیاسی		۰/۸۴			
ترغیب دانش آموزان به تکیه بر مثال مرجع یا مثال های تجربی در محتوای ریاضی		۰/۸۶			
برخورداری از دانش لازم برای چگونگی ارتقای اثبات استقرایی به اثبات قیاسی دانش آموزان		۰/۸۲			
استفاده از تعاریف و عبارات در دسترس را برای اثبات			۰/۷۵		
کاربرد بازنمایی در محدوده مفهومی محتوا برای درک و توسعه اثبات			۰/۸۴		
برقراری رابطه بین ریاضی و اصطلاحات روزمره برای ریاضی واقع گرا در اثبات			۰/۶۰		
اطلاع از راهبردهای پرسشگری برای ارتقای و رفع چالش های اثبات				۰/۶۱	

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

استفاده از روش های مناسب برای توضیح بیشتر فراتر از تعاریف رسمی اثبات				۰/۶۶	
استفاده از مثال های کاربردی یا مثال های نقض برای تشویق به تفکر در اثبات				۰/۷۲	
مطرح کردن ذهنیات و میزان فهم دانش آموزان برای توسعه تفکر در اثبات				۰/۶۸	
تکیه و تمرکز بر ایده های کلیدی دانش آموزان				۰/۶۹	
برخورداری از دانش لازم برای نحوه پیوند ارتباطات تصویری، نمادین و شفاهی در اثبات					۰/۷۲
اطلاع از چگونگی ایجاد اثبات بر اساس تعاریف پذیرفته شده در حین تدریس					۰/۸۹
اطلاع از نحوه ایجاد یک استدلال کلی در اثبات بر اساس یک مثال عددی یا نمودار خاص					۰/۶۶
بیان اهداف آموزشی مربوط به محتوای مورد نظر	۰/۸۱				
استفاده از از راهبردهای مناسب یا رویکردهای مناسب برای تدریس مفاهیم ریاضی	۰/۷۹				
تسلط کافی بر محتوای اثبات و چگونگی اجرای آن	۰/۶۸				
استفاده از از روش های خاصی برای تفکر درباره مفاهیم مورد نظر در حین اثبات	۰/۷۹				
شناسایی بدفهمی دانش آموزان خاص در حین اثبات	۰/۸۲				
شناسایی مشکلات در حین انجام تکالیف مربوط به اثبات	۰/۷۹				
پرداختن به ارتباط بین مفاهیم برای توسعه درک و انجام اثبات	۰/۷۵				
افزایش انگیزه دانش آموزان از طریق دریافت بازخورد مطلوب	۰/۷۲				
ارتباط بین محتوای یادگرفته شده در اثبات با زندگی روزمره	۰/۷۲				
ارتباط با محتوای یادگرفته شده در اثبات با دیگر مفاهیم مربوطه	۰/۷۴				
توجه به ایجاد مهارت در اثبات ریاضی	۰/۸۱				

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

اجرای فعالیت یادگیری جذاب در جهت افزایش تمرکز و علاقه مندی دانش آموزان	۰/۷۹				
استفاده از زبان نوشتاری درست و مناسب در فرآیند اثبات	۰/۷۲				
توانایی نظارت بر پیشرفت یادگیری در فرآیند اثبات	۰/۶۰				
تعیین مسیرها، فعالیت ها و تکالیف در حین اثبات	۰/۷۳				
انجام ارزشیابی تراکمی مطابق با توانمندی ها و شایستگی های دانش آموزان	۰/۸۰				

در جدول ۱۲ ماتریس دوران داده شده با کمک روش دوران واریمکس است. عامل ها به تفکیک مشخص گردیدند: عامل اول؛ دانش محتوایی پداگوژی در اثبات، عامل دوم؛ دانش صریح از طرحواره های اثبات، عامل سوم؛ دانش جنبه های توسعه اثبات، عامل چهارم؛ دانش رابطه بین تدریس و طرحواره های اثبات، عامل پنجم؛ دانش چگونگی ارتباطات در اثبات.

بحث و نتیجه گیری

یکی از دروسی که در مدرسه می تواند به دانش آموزان در تقویت تفکر و ذهنیاتشان کمک کند، درس ریاضی است. ریاضیات علمی با ویژگی‌های خاص می باشد که یکی از آن ها استدلال است که به ایده ها، مفاهیم و نمادهای انتزاعی می‌پردازد و به صورت سلسله مراتبی مطرح می شود. استدلال کردن برای دانش آموزان فرآیندی چالشی و مساله ساز است. دانش آموز باید علاوه بر اینکه بر مفهوم مورد نظر تسلط کافی داشته باشد، دلیلی بر رد یا قبول نظریه یا فرضیه مطرح نماید، در واقع فراتر از مرحله اول یادگیری پیش می روند. آموزش چنین فرآیندی باید از سوی آموزشگری انجام شود که دانش کافی در زمینه استدلال و اثبات را در مفهوم های محض ریاضی را داشته باشد. او باید بتواند قابلیت استدلال را در دانش آموزان پرورش دهد. در واقع تدریس چنین فرآیندی باید سلسله مراتبی را طی کند و همراه آن به ویژگی های فردی و موقعیتی دانش آموزان نیز توجه شود. زمانی این دو موضوع باهم تلفیق می شود که آموزشگر مجهز به دانش محتوایی پداگوژی و دانش اثبات باشد.

اثبات و مقوله تدریس آن در دهه های اخیر به طور گسترده در ادبیات آموزش ریاضی و به ویژه در مطالعات ریاضیات مورد بحث قرار گرفته است. اثبات حامل دانش ریاضی است که باید با دانش تدریس و دانش انتقال صحیح آن همراه باشد. به نظر می‌رسد که پژوهش در مورد اثبات در حیطه آموزش ریاضی عمدتاً با جنبه های منطقی اثبات روبرو است و بیشتر با مشکلاتی سروکار داشت که دانش‌آموزان از استدلال های قیاسی استفاده می کردند. اثبات موردی جدید در برنامه های درسی ریاضی است که اجرای

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

آن در برنامه درسی مدرسه ارزشمند است زیرا منجر به حل موفقیت آمیز مساله می شود. در نگاه معلم و برنامه درسی، اثبات و حل مسئله تا حد زیادی فرآیند یکسانی دارند و هر دو به درک معنی داری منتهی می‌شوند. این فرآیند زمانی رو به رشد است که آموزشگر توانمندی انتقال صحیح دانش از دو دیدگاه موضوعی و پداگوژی را داشته باشد. تلفیق محتوا و آموزش به درک چگونگی سازماندهی، نمایش و تطبیق موضوعات، مسائل با علایق و توانایی های متنوع دانش آموزان کمک می کند. دانش محتوایی پداگوژی در تعیین ساختار منحصر به فرد درس کلاسی ارزش ویژه ای دارد.

معلمی که در کلاس ریاضی بالاخص در دوره متوسطه فعالیت دارد، محتوای تدریس او زمانی تمام نیازهای دانش آموزان را مرتفع می سازد که به جنبه های دانش موضوعی، نیازهای دانش آموزان، نیازهای محیطی و فردی دانش آموزان و همـــچنین تدابیر برنامه ریزی درسی ریاضی توجه داشته باشد. زمانی می توانیم تدریس را قابل قبول بدانیم که موارد فوق برآورده شود. در مطالعات پیشین مشخص گردید ابزار یا مقیاسی که دانش موضوعی همچون دانش اثبات در ریاضیات و دانش محتوایی پداگوژی را همزمان بررسی نماید، وجود نداشت. در مطالعه حاضر بر اساس مولفه های مربوط به هر دو مقوله، مقیاسی بر اساس نظرات متخصصان در حوزه آموزش ریاضی طراحی گردید و از آنجایی که برای کاربرد در آینده باید روایی و اعتبار سنجی شود، سعی گردید با تحلیل عاملی، مولفه های و زیر مولفه ها مشخص گردند تا ابزاری برای کیفیت سنجی دانش محتوایی پداگوژی و دانش اثبات باشد. دانش اثبات در ریاضی یکی از مقوله های چالش برانگیز در کلاس ریاضی است که باید در حین تدریس به نیازهای فردی و محیطی دانش آموز توجه شود. لذا در این مطالعه پس از هنجاریابی مولفه های شاخصی برای ارزیابی دبیران ریاضی مشخص گردید، همچون؛ دانش محتوایی پداگوژی در اثبات، دانش صریح از طرحواره های اثبات، دانش جنبه های توسعه اثبات، دانش رابطه بین تدریس و طرحواره های اثبات، دانش چگونگی ارتباطات در اثبات. این عامل ها می توانند تعیین کننده کیفیت مطلوب فرآیند یاددهی- یادگیری در کلاس ریاضی باشند.

پژوهشگران برای پژوهش های آتی و پژوهشگران، پیشنهادهای پژوهشی و کاربردی ارائه می دهد. از جمله می توان پیشنهاد داد حوزه مربوط به ارزیابی دانش محتوایی پداگوژی با دانش های موضوعی دیگری از دروس دیگر در میان دبیران دوره متوسطه هنجاریابی و اعتبارسنجی شود؛ همچنین می توان این مقیاس هنجاریابی شده را برای ارزیابی کیفی دانش دبیران ریاضی دوره متوسطه در مدارس متوسطه اجرایی و پیاده سازی کرد. علاوه براین می توان مقیاس مورد نظر در مناطق دیگر و استان های دیگری پیاده سازی و اجرا شود و نتایج آن با مناطق و استان های دیگر مقایسه و تبیین شود. پیشنهاد می شود، از چنین مقیاسی برای ارزیابی سالانه دانش محتوایی پداگوژی با دانش های موضوعی دبیران دوره متوسطه استفاده شود و کیفیت دانش آنها از این جنبه مورد بررسی و تحلیل قرار گیرد. علاوه براین، می توان عملکرد دانش آموزان از نحوه اثبات و ارائه ایده های نو جهت اثبات قضایا و محتواهای ریاضی را هر ساله

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

مورد بررسی قرار دهیم تا میزان کیفیت دانش تدریس اثبات دبیران ریاضی در آن مقطع زمانی مشخص گردد. همچنین برای پژوهش های آتی، توصیه می شود، دانش محتوایی پداگوژی و دانش اثبات دبیران ریاضی دوره متوسطه بر اساس تولید محتواهای آموزش مجازی نیز مورد بررسی قرار گیرد.

این مطالعه از بابت برخی از متغیرها و نتیجه های حاصل با مطالعات پیشین مشابه همچون؛ Manero & Arnal-Bailera (۲۰۲۱)، Saleh Moh'd et al. (۲۰۲۱)، Moosapour (۲۰۱۹)، Noto et al. (۲۰۱۹)، Morrison & Luttenegger (۲۰۱۵)، Lim & Guerra (۲۰۱۵)، Şahin(۲۰۱۶)، Danisman & Tanisli (۲۰۱۷)، و Özdemir & Soyl (۲۰۱۷) همخوانی دارد. این پژوهش از لحاظ موضوعی محدود به دانش محتوایی پداگوژی و دانش اثبات در ریاضی بود، از لحاظ مکانی محدود به شهرستان های جنوبی استان تهران است و همچنین از لحاظ زمانی محدود به سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲ می باشد و از لحاظ شرکت کنندگان، محدود به دبیران ریاضی است.

تعارض منافع/حمایت مالی

این مقاله برگرفته از رساله دکتری محمدجواد کارخانه با عنوان بررسی و توسعه دانش محتوایی و دانش محتوایی پداگوژیکی معلمان ریاضی دوره متوسطه در اثبات های عام در دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی می باشد و از حمایت مالی دانشگاه برخوردار نبوده است، لذا این پژوهش تحت حمایت مالی قرار نگرفته است.

تشکر و قدردانی

بدین وسیله از دبیران ریاضی در شهرستان های جنوبی استان تهران به جهت همکاری لازم برای انجام پژوهش تشکر و قدردانی می نماییم.

منابع

Adilla, D.N., & Nurhabibah, R.(2020). Analisis Kemampuan Penalaran Matematis dan Self Confidence Siswa SMP pada Materi Aritmatika Sosial, J. *Equ. Teor. dan Penelit. Pendidik. Mat*., 3(2), 172–181.

Aftabi, P., Ali Asgari, M., Ghaderi, M. (2019). Designing a the teachers´ knowledge model in junior high school for science teachers, 7(2), 161-188. [In Persian]

Almpani, S., Stefaneas, P., Vandoulakis, I. (2023). Formalization of Mathematical Proof Practice Through an Argumentation-Based Model, *Global Philosophy*, 2-28.

Bieda, K.N., (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41, 351-382.

[Downloaded from journaliea.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

Bleomeke, S., Houang, R. T., & Suhl, U. (2014*). Diagnosing teacher knowledge by applying multidimensional item response theory and multiple-group models*. In S. Bleomeke, F. J. Hsieh, G. Kaiser, & W. H. Schmidt (Eds.), International perspectives on teacher knowledge, beliefs and opportunities to learn: TEDS-M results (pp. 483e501). Springer.

Brodahl, C., Larson, N., Wathne, U., & Bjørkestøl, K. (2020). Developing Further Support for In-Service Teachers' Implementation of a Reasoning-and-Proving Task and Their Identification of Students' Level of Mathematical Argumentation. *Journal of the International Society for Teacher Education*, 24(2), 73-87.

Campbell, T. G., & King, S. (2020). Eighth-grade students' use of communal criteria for collaborative proving. *Investigations in Mathematics Learning*, 12(2), 124–141.

Copur-Gencturk, Y., Tolar, T., Jacobson, E., & Fan, W. (2019). An empirical study of the dimensionality of the mathematical knowledge for teaching construct. *Journal of Teacher Education*, 70(5), 485-497.

Danisman, Ş., & Tanisli, D. (2017). Examination of mathematics teachers' pedagogical content knowledge of probability. *Malaysian Online Journal of Educational Sciences*, 5(2), 16-34.

Dickerson, D. S., & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 1-23.

Fukaya, T., Fukuda, M., & Suzuki, M. (2024). Relationship between mathematical pedagogical content knowledge, beliefs, and motivation of elementary school teachers. *Front. Educ*. 8(1276439), 1-11.

Gholamazad, S., & Gooya, Z. (2006). The role of proof in school mathematics curriculum, Mathematics education Journal, 3(3), 4-10.

Grossman, P. L. (1990). The *making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York, NY: Teachers College Press.

Hanuscin, D. L., & Lee, J. E. (2011). *Developing PCK for teaching teachers through a mentored internship in teacher professional development*. Association for Science Teacher Education.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). *Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof*. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 805–842). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Jalil, Z., Loh, W.I., & Lee, C. K. E. (2009). *The role of primary science teacher s subject matter knowledge & pedagogical content knowledge in lesson study*. National Institute of Education, Singapore.

Kadarisma, G., Senjayawati, E., Amelia, R. (2019). Pedagogical Content Knowledge Pre-Service Mathematics Teacher, International Seminar on Applied Mathematics and Mathematics Education.

Khakbaz, A. (2010). Schwab Line Shulman, Special Conference on Teacher Education, Group curriculum, Schwab and deliberation practice. Newsletter No. 3, Society for Iranian Curriculum Studies. [In Persian].

[Downloaded from journalieaa.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

Kleickmann, T., Richter, D., Kunter, M., Elsner, J., Besser, M., Krauss, S., Cheo, M., & Baumert, J. (2015). Content knowledge and pedagogical content knowledge in Taiwanese and German mathematics teachers. *Teaching and Teacher Education*, 46, 115-126.

Kuchemann, D., & Hoyles, C. (2009). From e*mpirical to structural reasoning in mathematics: Tracking changes over time*. In D. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), Teaching and learning proof across the grades: A K−16 perspective (pp. 171-190). New York, NY: Routledge.

Lannin, J.K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7, 231-258.

Lee, K. S. (2016). Students' proof schemes for mathematical proving and disproving of propositions. *Journal of Mathematical Behavior*, 41, 26–44.

Lesseig, K. (2011). *Mathematical knowledge for teaching proof*. Unpublished Doctoral Dissertation, Oregon State University

Lesseig, K. (2016). Investigating mathematical knowledge for teaching proof in professional development. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, 2(2), 253-270.

Lim, W., & Guerra, P. (2015). Using a pedagogical content knowledge assessment to inform a middle grades mathematics teacher preparation program. *Georgia Educational Researcher*, 10(2), 1-15.

Livy, S., & A. Downton, A. (2018). Exploring Experiences for Assisting Primary Pre-Service Teachers to Extend Their Knowledge of Student Strategies and Reasoning, *J. Math. Behav*, 15.

Manero, V., & Arnal-Bailera, A. (2021). Understanding Proof Practices of pre-Service Mathematics Teachers in Geometry, *Mathematics Teaching Research Joutrnal*, 13(3), 99-129.

Mahdavi, N., Niknam, Z., Ataran, M., Moosapour, N.A. (2021). Unpredictable Curriculum; As a Consequence, Corona and Post-Corona of the Eras, *Journal of Theory & Practice in Curriculum*, 17(9), 155-186. [In Persian]

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers college record*, 108(6), 1017-1054.

Moosapour, M. (2019). Proof in School Mathematics, Why? *Quarterly Journal of Education in Basic Sciences*, 5(14), 13-22. [In Persian]

Morrison, A. D., & Luttenegger, K. C. (2015). Measuring pedagogical content knowledge using multiple points of data. *The Qualitative Report*, 20(6), 804-816.

Mullis, I.V., Martin, M.O., Foy, P., & Hooper, M. (2016). TIMSS 2015: International Results in Mathematics (TIMSS & PIRLS: Boston College).

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA.

Noto, M.S., Priatna, N., & Dahlan, J.A. (2019). Mathematical proof: Learning obstacles pre-service teachers on transformation geometry. *Journal on Mathematics Education*, 10(1), 117-126.

[Downloaded from journalieaa.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

Özdemir, G., & Soylu, Y. (2017,). Examination of the pedagogical content knowledge of mathematics teachers. *International Online Journal of Primary Education IOJPE*, 6(1), 26-39.

Peressini, D., Borko, H., Romagnano, L., Knuth, E., & Willis, C. (2004). A conceptual framework for learning to teach secondary mathematics: A situative perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 56(1), 67-96.

Putnam, R. T., & Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? *Educational Researcher*, 29(1), 4-15.

Reyhani, E., & Kolahdoz, F. (2012). Reasoning process and proof in school mathematics, mathematics reasoning development, 2(1), 44-48. [In Persian]

Ross, K.A. (2006). Doing math and proof: The place of algorithm and proof in school mathematics, mathematics reasoning development, 23(3), 30-33.

Saleh Moh'd, S., Uwamahoro, J., Joachim, N., Aluko Orodho, J. (2021). Assessing the Level of Secondary Mathematics Teachers' Pedagogical Content Knowledge, *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(6), 2-11.

Şahin, Ö., Gökkurt, B., & Soylu, Y. (2016). Examining prospective mathematics teachers pedagogical content knowledge on fractions in terms of students' mistakes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(4), 531-551

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4–36.

Seyyedkalan, M., Golshan, A., Kuhi, A. (2020). Analysis of the experiences of new teachers graduating from farhangian university of content knowledge pedagogy (PCK) in the primary school classroom, *Applied Educational Leadership*, 1(2), 1-12. [In Persian]

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Sowder, L., & Harel, G. (2003). Case studies of mathematics majors' proof understanding, production, and appreciation. Canadian Journal of Science, *Mathematics and Technology Education*, 3, 251–267.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 38, 289–321.

Stylianides, G. J., & Silver, E. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics: The case of pattern identification. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), Teaching and learning proof across the grades: A K−16 perspective (pp. 235-249). New York, NY: Routledge.

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press.

Syamsuri, & Santosa, C. (2017). Karakteristik pemahaman mahasiswa dalam mengonstruksi bukti matematis. *Jurnal Review Pembelajaran Matematika*, 2(2), 131–143.

[Downloaded from journalieaa.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondrieteva, M., & Cheng, Y. H. (2012). *Cognitive Development of Proof*. In G. Hanna & M. De Villiers (Eds.), Proof and proving in mathematics education, The 19th ICMI Study (pp. 13–49). New York: Springer.

Tamir, P. (1988). Subject matter and related pedagogical knowledge in teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 4, 99-110.

Van Dijek, E. M., Zentrum, D., & Ossietzky, C. V. (2009). Pedagogical content knowledge in sight? A Comment on Kansanen. *Orbis Scholae*, 3 (2), 19-26.

Van Vo, D., & Csapó, B. (2020). Development of Inductive Reasoning in Students Across School Grade Levels, *Think. Ski. Creat*., 37.

Williams, F. O., Yahaya, L., & Owolabi, H. (2018). Teachers' knowledge indices as predictors of secondary school student's academic achievement in Kwara State, Nigeria. *IAFOR Journal of Education*, 6(1), 73-90.

Yan, X., Mason, J., & Hanna, G. (2017). An exploratory teaching style in promoting the learning of proof. In CERME 10.

[Downloaded from journalieaa.ir on 2026-06-01]

[DOI: 10.61186/meo.12.4.243]